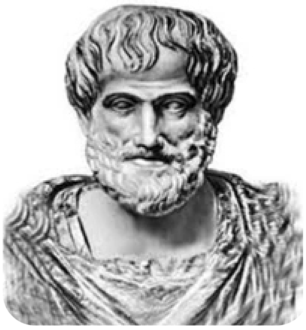
Adam1995: Adam John A.: Educated Guesses // Quantum: The Magazine of Math and Science. - 1995, Sept/Oct. — Vol. 6, No. 1. — P. 20-24

Обоснованные оценки



«Признак тренированного ума - довольствоваться степенью точности, которую позволяет природа предмета и не искать точности там, где возможна только приблизительная истина».
Аристотель

Фотография на удостоверени личности Ферми из Лос-Аламоса

Мы можем не быть столь эрудированными, как Аристотель, или столь же гениальными, как Энрико Ферми, но мы можем научиться применять элементарные рассуждения для получения приблизительных оценок для задач (впоследствии названные "задачами Ферми") в манере, свойственной этому великому физику. Несколько лет назад в журнале Quantum (май 1990 года) появилась небольшая статья Дэвида Холлидея. Она называлась "Ballpark Estimates" ("Приблизительные оцеки"), где на конкретном примере Холлидей показал, как можно получить приблизительные ответы на вопросы, разбивая их на части, и сделать соответствующие оценки, основанные на здравом смысле. Задача заключалась в том, чтобы оценить, сколько "атомов резины" стирается с поверхности автомобильной шины за каждый оборот колеса. Мы рассмотрим некоторый вариант этой задачи ниже, но что я нахожу особенно привлекательным в статье Холлидея - это диалог, который он ведет по ходу повествования с типичными вопросами читателя. Хотя это и не явяется обязательным для понимания данной статьи (заставив вас дочитать до этого места, я не готов так легко вас потерять!), все же настоятельно рекомендую прочитать ее. Конечно, высказанные идеи и методы, используемые в таких задачах Ферми, выходят далеко за пределы физики в область повседневной жизни (хотя наполнение Земли песком, вероятно, не может рассматриваться как обыденное занятие). Два замечательных ресурса, которые я с удовольствием читал и использовал это "Innumeracy" (“Математическое невежество") Джона Аллена Паулоса и "Consider a Spherical Cow" ("Рассмотрим сферическую корову") Джона Харта. Если вам уже довелось ознакомиться с этими книгами, то вы узнаете некоторые задачки оттуда, приведенные в этой статье. Через некоторое время вы освоитесь и привыкнете к постановке и оценке ответов на свои собственные задачи Ферми. Книга Паулоса станет для многих открытием: в частности, он показывает эффективность логически обоснованных предположений в сочетании с простыми расчетами. Книга Харта - это хорошее введение в математическое моделирование (в том числе, и решение экологических проблем) с минимальным использованием или вовсе без использования вычислений. Говоря об интересных книгах: в "The Universe Down to Earth"("Земная вселенная") Нила де Грасса Тайсона есть несколько глав (1 и 3), имеющие прямое отношение к настоящей статье. Во многом из того, что последует далее, буквы будут использоваться для обозначения стандартных размеров или других величин. Это позволит вам получить свои собственные оценки, хотя вы должны противиться соблазну просто "вставить" свои цифры в формулу без предварительных рассуждений. Почти наверняка мы будем расходиться во мнениях о типичных габаритах объектов (например, песчинок песка). Но почти так же наверняка для данного примера мы определим размер в диапазоне от 10-1мм $\leq d \leq$ 2 мм, так что, пожалуй, мы не будем существенно отличаться в порядке цифр в наших итоговых ответах. Помните о том, что всякий раз, когда необходимо найти соотношения размеров, преобразование единиц измерения может стать необходимым условием для сравнения аналогичных величин. Для полноты картины в этой статье приведены фактические числовые значения размеров - и некоторые из их них могут удивить вас.

Вы, конечно, спросите: и что с того, что я знаю, как подсчитать количество песчинок, которые заполнят Букингемский дворец? (А это мысль!) Помимо тюремного заключения за попытку проверить такой расчет, осознание того, что подобные "сделанные на коленке" вычисления, могут содержать некоторую значимую информацию для "настоящей глобальной проблемы" очень воодушевляет. Это может не только сэкономить значительную сумму денег и в ряде случаев, время, проведенное за компьютером, но и дать вам возможность лучше понять силу арифметики. Я видел, как "загорается лампочка", когда умные, образованные люди наконец-то осознают разницу между 10^6 секундами (11½ дня) и 10^9 секунд (32 года). Иногда нам нужны правильные крючки, чтобы повесить на них цифры и понятия!

Среди простейших оценочных задач, есть такие, которые вытекают из соотношений длин, площадей и объемов. Так, если D - стандартный линейный размер заданного объекта (например, классной комнаты), а $d < D$ - стандартный размер меньшего объекта (например, кусочек воздушной кукурузы - скажем более современно - "попкорн"!),

то $N = D^3/d^3$ - это приблизительное количество более мелких объектов, которые заполнят крупный. Таким образом, с помощью соответствующего выбора D и d мы можем получить ответы на следующие вопросы.

1. *Сколько мячей для гольфа нужно, чтобы заполнить чемодан?*
2. *Сколько кусочков попкорна нужно, чтобы заполнить комнату?*
3. *Сколько футбольных мячей поместится в доме среднего размера?*
4. *Сколько клеток содержится в человеческом теле?*
5. *Сколько песчинок потребуется, чтобы заполнить Землю? Аналогичные задачи затрагивают измерения объемов жидкостей.*
6. *Каков объем человеческой крови в мире?*
7. *Сколько одногаллоновых ведер необходимо, чтобы опустошить озеро Лох-Несс (и тем самым обнаружить чудовище)?*

Иногда привычные предметы наглядно представляют (или ошибочно представляют) в виде некой кубической формы. Таким образом, если мы спрашиваем, сколько предметов с типичным линейным размером d заполнят пространство с линейными размерами a, b, c, то подойдет формула $N = abc/d^3$. Таким образом, для задачи 1, мы можем предложить: $a = 20$, $b = 24$, $C = 8$ и $d = 1{,}5$ дюйма соответственно, поэтому $N \approx 10^3$. Для задачи 2 предположим, что $a = 10$ футов, $b = 20$ футов, $c = 15$ футов (размер комнаты), и $d = 1$ см. Затем, после преобразования в метрические единицы, $N \approx 3000 \times 30^3 \approx 10^8$. Для решения задачи 3, возьмем $D = 30$ футов и $d = 1$ фут, что дает $N \approx 10^4$. В задаче 4 получим 10^{14}, а ответ на задачу 6 - меньше, чем 1/200 миль (оба варианта будут рассмотрены ниже). Для задачи 5 значения $D \approx 10^4$ км и $d = 1$ мм дают $N \approx (10^4 \times 10^3 \times 10^2 \times 10)^3 = 10^{30}$. “Земля тоже кубическая?” - спросите вы. Не волнуйтесь, вы преодолеете и это, не оступившись (см. комментарий к задаче 14 ниже). Используя тот факт, что 1 кубический фут жидкости (вода, суп, кровь и так далее) составляет около 7,5 галлонов, мы получаем $N \approx 10^{12}$ ведер для опустошения Лох-Несс (задача 7). Озеро имеет объем примерно 2 мили^3 , поэтому $2 \times 5280^3 \times 7{,}5 = 10^{12}$. И к слову о галлонах, вот задача 8.

8. Для покрытия здания площадью A используется один галлон краски. Какова толщина слоя?

Очевидно, что если площадь A выражена в квадратных футах, то толщина $d = 1/7{,}5A$ футов. Для "кубического дома" из задачи 3 (полного футбольных мячей, как вы помните), $A = 6 \times 30^2 \approx 5 \times 10^3$ футов^2, так что $d \approx 10^{-5}$ футов $\approx 10^{-4}$ дюйма.

Вопросы более сложного характера требуют, что неудивительно, большего количества условий в расчётных формулах. Таким образом, мы имеем следующие задачи.

9. Сколько упаковок зубных нитей нужно заключенному?

В недавно опубликованной газетной статье рассказывалась история заключенного из исправительного центра в Западной Вирджинии. Он сбежал из тюрьмы,

используя веревку, сделанную из зубной нити, чтобы перелезть через тюремную стену. Веревка была толщиной с телефонный шнур, а высота стены - 18 футов. Взяв 4 мм за диаметр телефонного шнура и 1/2 мм для диаметра зубной нити, получим количество нитей в разрезе $(4 \div 1/2)^2 \approx 60$, и если каждая упаковка содержит 55 ярдов нити, то количество необходимых упаковок составляет
$N \approx (20 \times 60) / (55 \times 3) \approx 7$.

10. Оцените количество настройщиков роялей (P) в конкретном городе или регионе.

Предположим, что население региона составляет N, а число роялей в среднем на семью - p (как правило, $p<1$). Предположим, что фортепиано настраивают b раз в год в среднем (обычно $0 \leq b < 2$), так что количество настроек в год составляет приблизительно Npb/n_1, где n_1- среднее значение семей. Если каждый настройщик настраивает n_2 роялей в день ($0 < n_2 < 4$ в большинстве случаев), это соответствует $250n_2$ роялей в год (в году, как правило, 50×5 рабочих дней). Таким образом, количество настройщиков в регионе (городе, поселке, деревне) составляет приблизительно $Npb/250n_1n_2$. Давайте подставим некоторые цифры. Если для Нью-Йорка, скажем, $N \approx 10^7$, $n_1 = 5$, $b = 0{,}5$, $p = 0{,}2$, $n_2 = 2$, то
$P \approx (10^7 \times 10^{-1}) / (250 \times 10) \approx 4 \times 10^2$, то есть в интервале от 10^2 до 10^3.

11. Оцените количество C (представим, что это первая буква от слова "сапожник") мастеров по ремонту обуви в городе или регионе.

Если такой человек тратит в среднем t часов на ремонт в течение рабочего дня, продолжительность которого около T часов, то T/t - это среднее количество починок, выполняемых в день. Разумеется, некоторые ботинки стоит восстанавливать, а некоторые - нет. Предположим, что "рядовая пара обуви" ремонтируется каждые n лет, что приводит к коэффициенту ремонта 1/n в год. При 250 рабочих днях в году, наш сапожник может выполнить в среднем 250T/t работ в год, а при населении N, в год он обработает N/n пар обуви. Это приводит к расчету Nt/250nT сапожников в регионе. Таким образом, если мы возьмем в качестве нашего региона на этот раз всю территорию США (это, конечно, несколько претенциозно, но это тот вопрос, который мне задают постоянно), то $N \approx 2{,}5 \times 10^8$, $t \approx 1/2$, $T \approx 10$, $n \approx 2$, поэтому $C=(2.5 \times 10^8 \times 1/2) /(250 \times 2 \times 10) \approx 10^4$.

12. Определите скорость роста человеческого волоса (в среднем) в милях в час.

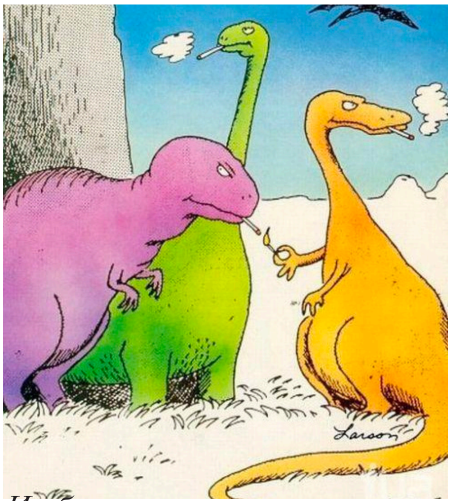
Если волосы подстригают каждые n месяцев (обычно $n \leq 2$) и в среднем срезается x дюймов, то x/n дюймов - длина волос, которая срезается в месяц ≈
$x/n \times 1/(5280 \times 12) \times 1/(30 \times 24)$ миль/ч $\approx 10^{-8}$ (x/n) миль/ч. Если $n = 2$, а $x = 1$, то скорость роста волос составляет приблизительно 10^{-8} миль/ч.

Теперь вернемся к задаче с кровью (номер 6).

6. (повторно) Оцените общий объем человеческой крови в мире.
Для населения в 5109 с 1 галлоном крови в среднем на человека, $V \approx 5 \times 10^9/7{,}5 \approx 7 \times 10^8$ футов^3. Все это то, как отмечает Паулос, может быть заключено в кубе с длиной стороны $(7 \times 10^8)^{1/3} \approx$ 900 футов. Выражаясь немного более прозаично, если, к примеру, Центральный парк имеет площадь 1,3 мили^2, вся эта кровь покроет его на глубину примерно $(7 \times 10^8) / [1{,}3 \times (5280)^2] \approx 20$ футов. Хмм..

13. Подсчитайте количество сигарет, выкуриваемых ежегодно в США.
Пусть f - это доля курящих людей среди населения, а n - среднее количество выкуриваемых сигарет в день. Тогда $N = 2{,}5 \times 10^8 \times 365 \times fn \approx 10^{11}$,
если $f \approx 10^{-1}$ и $n \approx 10$.

14. Задача про астероид.
В свете столкновения (вернее столкновений) кометы Шумейкеров-Леви с атмосферой Юпитера, был поднят вопрос: может ли подобное произойти здесь, на Земле? Возможно, это уже случалось - одна из теорий вымирания динозавров (не теория Гэри Ларсона[1]) заключается в том, что около 65 миллионов лет назад подобное столкновение состоялось - на этот раз с астероидом. В конце концов, пыль от от удара осела обратно на поверхность Земли, проделав потрясающую работу по блокированию солнечного света и тем самым уничтожив растительную и животную жизнь. Согласно одной из гипотез, около 20% массы астероида равномерно осело на (теперь уже довольно негостеприимной) поверхности Земли, что составило около 0,02 гм/см^2. Вопрос: какого размера был астероид? (Вам может показаться, что на данном этапе более уместным вопросом будет: "Как звали водителя автобуса?" Но не волнуйтесь, мы ответим на него позже.) Итак, масса очевидно около $4\pi R^2 \times 0{,}02 \times 5$, где R - радиус Земли в сантиметрах. Это должно быть приравнено к плотности, умноженной на объем для куба с длиной стороны L (это простейшая из возможных геометрических форм: самая большая сфера, которую можно вписать в куб со стороной L, отличается от объема этого куба в соотношении $\pi/6 \approx 1/2$, что не повлияет на порядок величины в наших расчетах). Предположим, что стандартная плотность земли 2 гм/см^3, так что $2L^3 \approx 0{,}4\pi R2$, что дает нам $L \approx (0{,}2\pi R^2)^{1/3}$. Поскольку $R \approx 4000 \times 1{,}6 \times 10^5$ см (пересчитывая мили в сантиметры) $= 6{,}4 \times 10^8$ см, тогда



Изображение взято https://ualife.org/Posts/14048

1 "Его известная карикатура показывает нескольких динозавров разбойничьего вида, стоящих группой и курящих сигареты. Надпись гласит: "Настоящая причина, по которой вымерли динозавры". -Ред.

$L \approx 6 \times 10^5$ см, или 6 км (то есть порядка 10 км). Для астероида это не является невероятным размером (хотя динозавры могут с этим не согласиться).

15. Толщина слоя масла.

Пожалуй, мало кто любит принимать лекарства. Ходят слухи, что Бенджамин Франклин заметил, что 0,1 $см^3$ масла (это было масло печени трески?), пролитого в озеро, распространяется на максимальную площадь 40 $м^2$. Если d - толщина слоя в метрах, тогда $40d = 10^{-7}$, так что $d = 25 \times 10^{-10}$ м, или 25 ангстрем. Интересно, что это соответствует "мономолекулярному слою" из 10-12 атомов (с атомом-промежутком-атомом-... для молекулы), что примерно соответствует молекуле "легкого" масла.

16. Количество листьев на дереве.

Если r - условный радиус кроны дерева, то площадь поверхности равна $4\pi r^2$, а если d - это (в тех же единицах, что и r) примерный размер листьев, то количество их составляет $4\pi r^2/d^2$. Очевидно, что они не покрывают "поверхность" кроны непрерывным слоем; однако это компенсирует тот факт, что много листьев находится на ветвях внутри кроны. Для небольшого дерева (например, 15-20 - летнего тиса), лиственный покров имеет радиус $r \approx 4$ фута и $d \approx 1$ дюйм, поэтому $N \approx 3 \times 10^4$ - то есть, в целом порядок величины составит 10^4 - 10^5, если мы учитываем также и более крупные деревья.

17. Еженедельная выручка супермаркета.

Если имеется n_1 касс, обслуживающих в среднем n_2 покупателя в час, средний чек покупателя составляет x долларов, а магазин работает в среднем n_3 часов в день, то в среднем за неделю он заработает $R \approx 7n_1 n_2 n_3 x$ долларов. Если же, например, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ и $n_3 = 14$, то мы найдем, что $R \approx 10^5$ долларов.

18. Ежедневная смертность в городе или регионе.

Если в городе или регионе с населением n_1 среднее число смертей в день (например, исходя из раздела некрологов местной газеты) составляет n_2, мы можем с помощью простой пропорции получить оценку ежедневного уровня смертности d в стране (с населением N). Таким образом, $d \approx Nn_2/n_1$. Очевидно, что такой грубый анализ не может быть применен повсеместно. Уровень смертности значительно варьируется от страны к стране. Тем не менее, можно получить "нижнюю границу" мирового уровня смертности аналогичным образом. Так, если $n_1 \approx 10^6$, а $n_2 \approx 30$, то $N \approx 2,5 \times 10^8$.

19. Количество травинок на Земле.

Если 40% поверхности Земли покрыто сушей, то часть f_1 этой поверхности покрыта

травой. Если среднее количество травинок на квадратный дюйм равно n, то $N \approx (0,4) 4\pi R^2 f_1 n$ для R, измеряемого в дюймах. Таким образом, для $R \approx 4000 \times 5280 \times 12$, $f_1 \approx 10^{-2}$ или 10^{-1} (это трудно оценить без небольшого исследования), и $n \approx 20$, то $N \approx 10^{16}$ или 10^{17}.
Теперь давайте вернемся к варианту задачи про автомобильные шины.

20. Какова средняя глубина стирания протектора за один оборот автомобильной шины?
На этот вопрос можно ответить с помощью простой пропорции: искомое расстояние d соответствует стандартному протектору t (для новой шины) как окружность шины $2\pi R$ - длине полезного пробега L. Таким образом, $d \approx 2\pi Rt/L$, что в случае R=1 фут, $L=5 \times 10^4$ миль, t = 5 мм соответствует (после перевода единиц измерений!) $d \approx 10^{-7}$ мм.

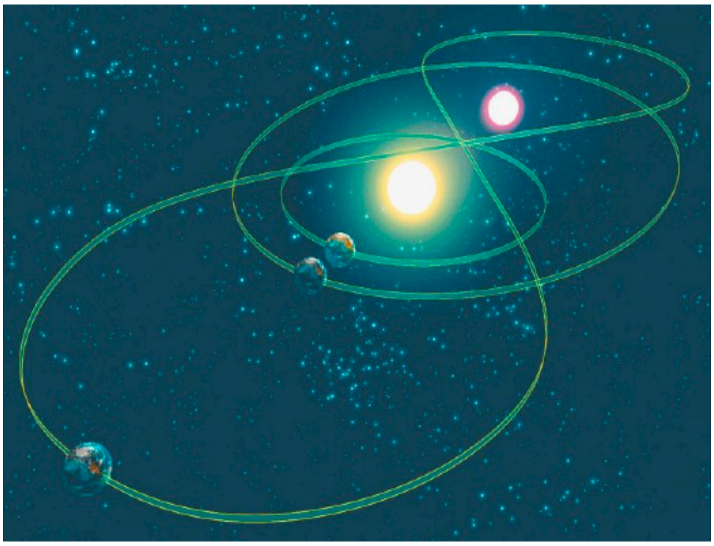
21. Популяционный квадрат.
Если бы каждому человеку на Земле было предоставлено достаточно пространства, чтобы комфортно стоять на земле, не касаясь никого, оцените длину стороны квадрата, который вместил бы всех желающих. Если мы дадим каждому по квадрату со стороной 1/2 м, то сторона большого квадрата будет $L \approx (5 \times 10^9)^{1/2} \times 1/2 \times 10^{-3}$ км = 35 км.

22. Площадь и объем поверхности человека.
Чтобы оценить эти величины грубо, но быстро, рассмотрим цилиндр радиуса r и высоты h: если $r \approx 1/2$ фута и $h \approx 6$ футов, то $V = \pi R^2 h \approx 5$ футов^3, а $S = 2\pi rh \approx 20$ футов^2. Поскольку 1 фут $\approx 0,3$ м, $V \approx 0,1$ м^3. Теперь мы можем вернуться к задаче 4.

4. (повтор) Оцените количество клеток в человеческом теле.
Если мы предположим, что средний диаметр клетки 10 микрон, или 10^{-5} м, то, поскольку фут $\approx 0,3$ м, V из задачи 22 равно приблизительно 10^{-1} м^3, таким образом $N \approx 10^{-1}/(10^{-5})^3 \approx 10^{14}$ клеток.

23. Средняя скорость роста ребенка от рождения до 18 лет.
За этот промежуток времени "скорость" равна примерно $(h_{18}-h_0)/18 \approx 1/18$ м/год $\approx 10^{-3}/(20 \times 400 \times 20)$ км/ч $= 10^{-8}$ км/ч, т.е. примерно такой же порядок величины, как скорость роста волос! Возможно, мы могли бы обозначать детей как сверх- или суб- "фолликулярными" в зависимости от того, растут ли они быстрее чем волосы!

Оставшиеся задачи касаются SETI (the search for extraterrestrial intelligence - поиск внеземного разума) и космических полетов. Астроном Фрэнк Дрейк сделал работу за нас, выведя знаменитую формулу Дрейка для числа N существующих технологических цивилизаций в галактике. Здесь термин "технологический" может означать как минимум такие же технологические способности, какими обладаем мы на планете Земля. Таким образом, если n_s равно числу звезд в галактике, f_p - доля этих звезд среди планетных систем, n_p - количество планет, пригодных для жизни, в одной планетной системе, f_b - доля планет, где жизнь в реальности существует, f_i - доля планет npfb, на которых развились разумные организмы, f_c - доля тех разумных видов, которые развили коммуникативную цивилизацию, и f_l - продолжительность жизни этих цивилизаций в масштабах возраста галактики, то



Изображение взято https://asteropa.ru/dvojnye-zvezdy-vo-vselennoj/

$$N \approx n_s f_p n_p f_b f_i f_c f_l.$$

Из семи величин, расположенных справа этого выражения, первая является астрономической по своему характеру - она хорошо известна и составляет около 4×10^{11}. Следующие два числа - это реально обоснованные астрономические предположения. Два следующих (f_b и f_i) имеют биологическую природу, и здесь мы находимся на довольно зыбкой почве, потому что в выборочном пространстве у нас только один подтвержденный пример (мы сами!). Последние два значения являются социологическими по своей сути, и поэтому в данном контексте являются чистым предположением! Таким образом, получается что цифры, которые человек ставит свидетельствуют о его философской позиции: хотим мы того или нет, у всех нас есть свои предубеждения относительно Вселенной, которую мы населяем. Просто для развлечения, давайте посмотрим, к чему это приведет для оптимиста и пессимиста. В обоих случаях мы можем принять $f_p \approx 0{,}2$ (помните, что почти половина звезд в нашей галактике считаются как минимум бинарными системами[2]) и $n_p \approx 0{,}1$. Для остальных четырех значений наш оптимист возьмет 1,0, 1,0, 0,5, и $10^6/10^{10} = 10^{-4}$, соответственно, что даст $N \approx 10^5$ - 10^6. Наш пессимист, с другой стороны, определит последние четыре как 0,1, 0,1, 0,1 и $10^4/10^{10} = 10^{-6}$, соответственно, и получит $N \approx 10$. А к кому вы себя отнесете?

2 В астрономии бинарная или двоичная звезда, которая также называется двоичной звездной системой, является разновидностью системы из двух звезд, вращающихся вокруг общего центра тяжести и связанных гравитационно. Бинарные звезды с низкой массой могут быть лучшим домом для внеземной жизни, поскольку их совокупная энергия расширяет потенциально обитаемый регион, в отличие от одиночных звезд. - Прим. перевод.

Самое время для следующего напоминания: будь то дебаты, математическая теория или просто предположение, ***аргумент хорош лишь настолько, насколько хорошо самое слабое утверждение, заложенное в него.***

24. Среднее расстояние между двумя цивилизациями.

Наша галактика имеет форму диска размером 10^5 световых лет (СЛ) в диаметре и "толщиной" около 10^4 СЛ. Очевидно, что звезды сосредоточены больше в районе галактического центра, но мы можем получить грубую верхнюю оценку среднего расстояния между двумя цивилизациями, разделив объем галактики $[\pi(10^5)^2/4] \times 10^4 \approx 10^{14}$ кубических СЛ на оптимистическую цифру $N \approx 10^6$. (Помните, что 1 световой год, то есть расстояние, которое проходит свет за один год 6×10^{12} миль. Посчитайте сами, сколько это будет.) Взяв кубический корень из 10^8, получим примерно 500 СЛ. С другой стороны, если $N \approx 10$ (оценка пессимиста), то расстояние составит 2×10^4 СЛ.

25. Сколько запусков межзвездных космических кораблей мы можем ожидать в год?

Предположим, что в среднем каждая цивилизация способна запускать косм ический транспорт в количестве s в год. Если $N \approx 10^6$ - наша самая оптимистичная оценка - то (в стабильном режиме) будет примерно $10^6 s$ кораблей, прибывающих в год где-то в пределах галактики. Допустим, существует примерно 10^{11} интересных мест для посещения (каждая звезда!). Тогда мы можем ожидать $10^6 s/10^{11} = 10^{-5} s$ прибытий в данное "интересное место" в год. Представим, что таких посещений на Землю заявлено v в год. Тогда средняя скорость запуска s должна быть $10^5 v$ в год или в общей сложности $10^{11} v$ в пределах галактики. Это составляет 10^{11}- 10^{14}, если $v = 1 - 10^3$. В целом, это кажется довольно чрезмерным, особенно если попытаться вычислить количество материала, необходимого для изготовления такого большого количества космических кораблей!

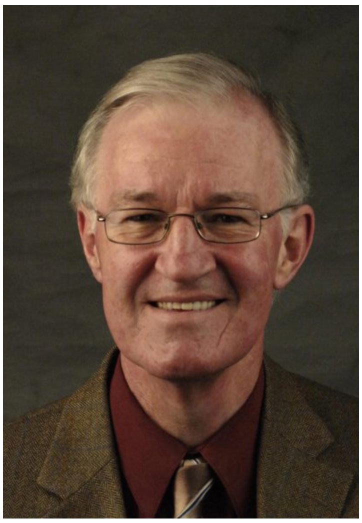


Фото взято с сайта Old Dominion University: https://www.odu.edu/directory/john-adam

Да, и еще кое-что. В задаче 14 я спрашивал (среди прочего), как зовут водителя автобуса. Есть большая вероятность, что это Джон. Почему? Достаточно простой оценки. Приведу "стандартный" пример: на моем факультете (Математики и Статистики) 28 штатных преподавателей. Семь из нас носят имя Джон. Из этого я делаю неизбежный вывод, что одного человека из четырех (да, даже включая женщин) зовут Джон. Конечно, это только предположение ...

Джон А. Адам преподает математику в Университете Олд Доминион (Old Dominion University) в Норфолке, штат Вирджиния. Он не водит автобус в свое свободное время.

Список упомянутой литературы:

1. Halliday1990: Halliday David(1916-2010)(University of Pittsburgh): Ballpark Estimates (Fermi Problems): How to impress your date and amaze your friends with off-the-cut answers to questions of magnitude// Quantum: The Magazine of Math and Science, May 1990.
https://kolesnikov.org/D/Halliday1990.pdf

2. Paulos2001: John Allen Paulos: Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences. - New York: Yill and Wang, 2001.
https://jirsresourcecentre.files.wordpress.com/2011/04/innumeracy.pdf

3. Harte1988: Harte John(1939-) Consider a Spherical Cow. A Couse in Environmental Problem Solving. - Sausalito, California: University Science Books, 1988. - 283p.

4. Tyson1994: Neil de Grasse Tyson: Universe Down to Earth. - New York: Columbia University Press, 1994. - 277p.