Школьный инспектор

Я повторяю то, что подчеркивал в гл. 1 (и в других местах): в любой ситуации имеются элементы или черты, которые являются центральными в структуре, и другие элементы, которые таковыми не являются, будучи периферическими, изменчивыми. Например, абсолютные длины вспомогательных линий параллелограмма связаны со структурной взаимосвязью не больше, чем цвет параллелограмма.

Увидеть, постичь, понять, что́ является структурно центральным, а что́ нет, — вот самое главное во всех случаях мышления. В разделе 14 гл. 1 мы привели пример, когда испытуемым была высказана гипотеза (что последовательные произведения возрастают на единицу), не имевшая ничего общего со структурой, подразумеваемой в задаче.

Чтобы пояснить этот вопрос, я приведу пример совершенно иного рода. Говорят, что эти события произошли в маленькой деревушке в Моравии во времена старой Австрийской империи. Однажды сюда приехал инспектор министерства просвещения. Проведение таких периодических проверок школ входило в его обязанности. Понаблюдав за классом, он в конце урока встал и сказал: «Дети, я рад был видеть, что вы хорошо занимаетесь. У вас хороший класс. Я удовлетворен вашими успехами. И вот, прежде чем уехать, я хочу задать вам один вопрос: «Сколько волос у лошади?» К удивлению учителя и инспектора, один девятилетний мальчик очень быстро поднял руку. Мальчик сказал: «У лошади 3 571 962 волоса». Инспектор с удивлением спросил: «А откуда ты знаешь, что это точное число?» Мальчик ответил: «Если вы не верите мне, можете сосчитать сами». Инспектор разразился громким смехом, искренне радуясь ответу мальчика. Когда учитель провожал его к двери, он, все еще от души смеясь, сказал: «Какая забавная история! Я должен рассказать ее своим коллегам по возвращении в Вену. Я уже предвижу, как они воспримут ее; ничто не радует их так, как хорошая шутка». И с этим он уехал.

Прошел год, инспектор снова приехал в ту же сельскую школу с ежегодным визитом. Когда учитель провожал его к двери, он остановился и сказал: «Между прочим, господин инспектор, как понравилась вашим коллегам история с лошадью и количеством волос у нее?» Инспектор похлопал учителя по спине. «О да, — сказал он. — Видите ли, я действительно хотел рассказать эту историю — это была очень забавная история, — но понимаете, я не смог этого сделать. Когда я вернулся в Вену, то, хоть убейте, никак не смог вспомнить число волос».

Это выдуманная история, по крайней мере я надеюсь, что это так. Я спрашивал многих людей, после того как они прослушали рассказ: «В чем суть этой истории?» Один тип ответа: «Это действительно глупая история; этот инспектор мыслил так, что нарушал старые логические различия между существенным и несущественным». Я сказал: «Конечно, но скажите, пожалуйста, что вы понимаете под словом «существенный»?» Большинство людей не могут объяснить это (кроме того, они не чувствуют необходимости в объяснении столь очевидной вещи). А те, кто может, либо делают это очень неуклюже и довольно странно, либо приводят исторические варианты значения слова «несущественный» типа «быть непостоянным» и т. п. и считают вопрос решенным, хотя в действительности это не ответ.

Некоторые отвечают правильно: «Видите ли, не имеет значения, какое количество волос названо в рассказе». Я сказал: «Правильно, но скажите, пожалуйста, почему?» И затем иногда отвечают, что число волос «несущественно». «Величина числа никак не связана с основной мыслью рассказа, между ними нет никакой взаимозависимости или, точнее, нет никакой осмысленной внутренней связи между всем рассказом и именно этим числом (нет ρ-отношения). Поэтому число можно варьировать в разумных пределах». Функция этого элемента, его место и роль в структуре никак не связаны с тем, каково именно это число. Структура не предъявляет никаких функциональных требований к точности числа. Структурным требованиям удовлетворяет здесь любое (большое) число.

А почему этот рассказ часто воспринимается как очень хорошая шутка? Из-за удивления при виде глупой решимости придерживаться именно этого числа, как будто его чал особенности проблем, связанных с задачей Гаусса.

Теперь я расскажу историю о маленьком Гауссе, будущем знаменитом математике. Она заключается в следующем: шестилетним мальчиком он учился в средней школе небольшого городка. Учитель предложил контрольное задание по арифметике и объявил классу: «Кто из вас первым найдет сумму $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$?» Очень скоро, в то время как остальные все еще были заняты вычислениями, юный Гаусс поднял руку. «Ligget-se», — сказал он, что означало: «Вот!»

«Каким образом, черт побери, тебе это так быстро удалось?» — воскликнул пораженный учитель. Юный Гаусс ответил — конечно, мы не знаем точно, что он ответил, но на основании экспериментального опыта я считаю, что он ответил приблизительно так: «Если бы я искал сумму, складывая 1 и 2, затем прибавляя к сумме 3, затем к новому результату — 4 и т. д., то это заняло бы очень много времени; и, пытаясь сделать это быстро, я, пожалуй, наделал бы ошибок. Но посмотрите, 1 и 10 в сумме дают 11, 2 и 9 снова в сумме составляют 11. И так далее! Существует 5 таких пар; 5, умноженное на 11, даст 55». Мальчик понял суть важной теоремы [1]. Запишем это в виде схемы:

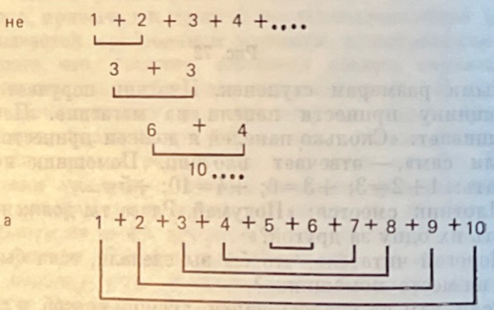

Рис. 73

[1] $S_n=(n+1)\dfrac{n}{2}$

Подобно учителю, предложившему классу эту задачу, я задавал ее многим испытуемым, включая детей разного возраста, желая узнать, будет ли найдено правильное решение и какие средства, какие условия могут помочь найти его. Для того чтобы изучить связанные с этим решением шаги и его характерные черты, я применял систематические вариации; некоторые из них опишу в дальнейшем. Иногда я предлагал очень длинные ряды. Я прямо говорил: «Решите задачу, не прибегая к громоздким сложениям» — или просто ждал реакции испытуемых.

Вот лучшие из типичных процессов, которые я обнаружил.

1. Сначала не было заметно, что человек решает задачу. Затем: «При заданной последовательности чисел, которые нужно сложить, конечно, правильно складывать их в порядке следования — но это так утомительно». Вдруг: «Это не просто любая последовательность; числа последовательно возрастают, шаг за шагом, — этот факт может... он должен иметь какое-то отношение к сумме. Но как эти две вещи связаны друг с другом — форма последовательности и ее сумма, — какова внутренняя связь между ними, остается неясным; я каким-то образом чувствую это, но не могу это понять».

Через некоторое время: «У ряда есть направление возрастания. У суммы нет направления. Так вот: *возрастание* слева направо связано с соответствующим *убыванием* справа налево! Этот факт *должен* иметь отношение к сумме. $\longrightarrow$ все больше и больше; $\longleftarrow$ все меньше и меньше — в той же пропорции. Если двигаться слева направо, от первого числа ко второму, то увеличение будет равно единице; если двигаться справа налево, от последнего числа к предпоследнему, то уменьшение будет равно единице. Следовательно, сумма первого и последнего числа должна быть той же, что и сумма следующей внутренней пары. И это должно быть так всюду!»

«Остается только ответить на вопрос: сколько таких пар? Очевидно, что число пар равно половине всех чисел, следовательно, равно половине последнего числа».

В сущности, здесь происходит перегруппировка, реорганизация ряда в свете данной задачи. Это не слепая перегруппировка, она естественно возникает по мере того, как испытуемый старается постичь внутреннюю связь чал особенности проблем, связанных с задачей Гаусса.

Теперь я расскажу историю о маленьком Гауссе, будущем знаменитом математике. Она заключается в следующем: шестилетним мальчиком он учился в средней школе небольшого городка. Учитель предложил контрольное задание по арифметике и объявил классу: «Кто из вас первым найдет сумму 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10?» Очень скоро, в то время как остальные все еще были заняты вычислениями, юный Гаусс поднял руку. «Ligget-se», — сказал он, что означало: «Вот!»

«Каким образом, черт побери, тебе это так быстро удалось?» — воскликнул пораженный учитель. Юный Гаусс ответил — конечно, мы не знаем точно, что он ответил, но на основании экспериментального опыта я считаю, что он ответил приблизительно так: «Если бы я искал сумму, складывая 1 и 2, затем прибавляя к сумме 3, затем к новому результату — 4 и т. д., то это заняло бы очень много времени; и, пытаясь сделать это быстро, я, пожалуй, наделал бы ошибок. Но посмотрите, 1 и 10 в сумме дают 11, 2 и 9 снова в сумме составляют 11. И так далее! Существует 5 таких пар; 5, умноженное на 11, даст 55». Мальчик понял суть важной теоремы [1]. Запишем это в виде схемы:

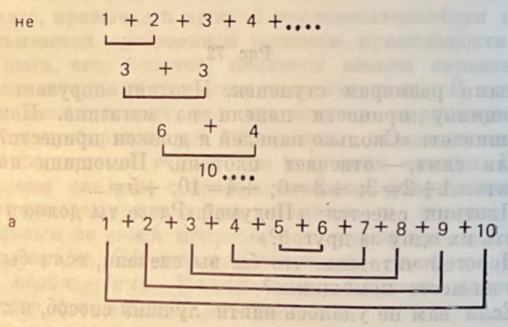

Рис. 73

[1] $S_n = (n+1)\dfrac{n}{2}$

Подобно учителю, предложившему классу эту задачу, я задавал ее многим испытуемым, включая детей разного возраста, желая узнать, будет ли найдено правильное решение и какие средства, какие условия могут помочь найти его. Для того чтобы изучить связанные с этим решением шаги и его характерные черты, я применял систематические вариации; некоторые из них опишу в дальнейшем. Иногда я предлагал очень длинные ряды. Я прямо говорил: «Решите задачу, не прибегая к громоздким сложениям» — или просто ждал реакции испытуемых.

Вот лучшие из типичных процессов, которые я обнаружил.

1. Сначала не было заметно, что человек решает задачу. Затем: «При заданной последовательности чисел, которые нужно сложить, конечно, правильно складывать их в порядке следования — но это так утомительно». Вдруг: «Это не просто любая последовательность; числа последовательно возрастают, шаг за шагом, — этот факт может... он должен иметь какое-то отношение к сумме. Но как эти две вещи связаны друг с другом — форма последовательности и ее сумма, — какова внутренняя связь между ними, остается неясным; я каким-то образом чувствую это, но не могу это понять».

Через некоторое время: «У ряда есть направление возрастания. У суммы нет направления. Так вот: *возрастание* слева направо связано с соответствующим *убыванием* справа налево! Этот факт *должен* иметь отношение к сумме. ⟶ все больше и больше; ⟵ все меньше и меньше — в той же пропорции. Если двигаться слева направо, от первого числа ко второму, то увеличение будет равно единице; если двигаться справа налево, от последнего числа к предпоследнему, то уменьшение будет равно единице. Следовательно, сумма первого и последнего числа должна быть той же, что и сумма следующей внутренней пары. И это должно быть так всюду!»

«Остается только ответить на вопрос: сколько таких пар? Очевидно, что число пар равно половине всех чисел, следовательно, равно половине последнего числа».

В сущности, здесь происходит перегруппировка, реорганизация ряда в свете данной задачи. Это не слепая перегруппировка, она естественно возникает по мере того, как испытуемый старается постичь внутреннюю связь